

2015 考研数学 (三) 真题 (完整版)

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 设 $\{x_n\}$ 是数列. 下列命题中不正确的是

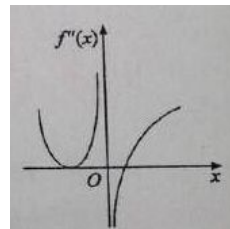
(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$.

(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$.

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如右图所示, 则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为



- (A) 0.
- (B) 1.
- (C) 2.
- (D) 3.

(3) 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \leq 2y\}$, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy =$

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$

(C) $2 \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^x f(x, y) dy.$

(D) $2 \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy.$

(4) 下列级数中发散的是

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}.$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$

(C) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n}.$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$

(5) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$. 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解的充

分必要条件为

- (A) $a \notin \Omega, d \notin \Omega$. (B) $a \notin \Omega, d \in \Omega$.
 (C) $a \in \Omega, d \notin \Omega$. (D) $a \in \Omega, d \in \Omega$.

(6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $p = (e_1, e_2, e_3)$. 若 $Q = (e_1, -e_3, e_2)$, 则 (x_1, x_2, x_3) 在正交变换下 $x = Qy$ 的标准形为

- (A) $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$. (B) $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.
 (C) $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ (D) $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

(7) 若 A, B 为任意两个随机事件, 则

- (A) $P(AB) \leq P(A)P(B)$. (B) $P(AB) \geq P(A)P(B)$.
 (C) $P(AB) \leq \frac{P(A)+P(B)}{2}$. (D) $P(AB) \geq \frac{P(A)+P(B)}{2}$.

(8) 设总体 $X \sim B(m, \theta)$, x_1, x_2, \dots, x_n 为来自该总体的简单随机样本, \bar{X} 为样本均值, 则

$$E \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right] =$$

- (A) $(m-1)n\theta(1-\theta)$ (B) $m(n-1)\theta(1-\theta)$
 (C) $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$ (D) $mn\theta(1-\theta)$

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

(9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} =$ _____.

(10) 设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^{x^2} xf(t)dt$. 若 $\varphi(1) = 1$, $\varphi'(1) = 5$, 则 $f(1) =$ _____.

(11) 若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 确定, 则 $dz|_{(0,0)} =$ _____.

(12) 设函数 $y = y(x)$ 是微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的解, 且在 $x = 0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3, 则 $y(x) =$ _____.

(13) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 2, -2, 1, $B = A^2 - A + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 则行列式 $|B| =$ _____.

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(1, 0; 1, 1; 0)$, 则 $P\{XY - Y < 0\} =$ _____.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x, g(x) = kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小, 求 a, b, k 的值.

(16) (求本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D x(x+y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$.

(17) (本题满分 10 分)

为了实现利润最大化, 厂商需要对某商品确定其定价模型, 设 Q 为该商品的需求量, p 为价格, MC 为边际成本, η 为需求弹性 ($\eta > 0$).

(I) 证明定价模型为 $p = \frac{MC}{1 - \frac{1}{\eta}}$:

(II) 若该商品的成本函数为 $C(Q) = 1600 + Q^2$, 需求函数为 $Q = 40 - p$, 试由 (I) 中的定价模型确定此商品的价格.

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对任意的 $x_0 \in I$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0) = 2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

(19) (本题满分 10 分)

(I) 设函数 $u(x), v(x)$ 可导, 利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$:

(II) 设函数 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ 可导, $f(x) = u_1(x)u_2(x) \cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.

(20) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, 且 $A^3 = 0$.

(I) 求 a 的值;

(II) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 求 X .

(21) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 Y 为观测次数.

(I) 求 Y 的概率分布;

(II) 求 EY .

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自该总体的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量;

(II) 求 θ 的最大似然估计量.