

2024考研数学二

试题及答案解析完整版

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

- (1) 函数 $f(x) = |x| \frac{1}{(1-x)(x-2)}$ 的第一类间断点的个数 () .
(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

【答案】 C

- (2) 函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1 + t^3 \\ y = e^{t^2} \end{cases}$ 确定，则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[f\left(2 + \frac{2}{x}\right) - f(2) \right] = ()$.
(A) $2e$ (B) $\frac{4}{3}e$ (C) $\frac{2}{3}e$ (D) $\frac{e}{3}$

【答案】 B

- (3) 设函数 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin t^3 dt$, $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则 () .
(A) $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为奇函数
(B) $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数
(C) $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为偶函数
(D) $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数

【答案】 D

- (4) 已知数列 $\{a_n\} (a_n \neq 0)$, 若 $\{a_n\}$ 发散, 则

- (A) $\{a_n + \frac{1}{a_n}\}$ 发散 (B) $\{a_n - \frac{1}{a_n}\}$ 发散
(C) $\{e^{a_n} + \frac{1}{e^{a_n}}\}$ 发散 (D) $\{e^{a_n} - \frac{1}{e^{a_n}}\}$ 发散

【答案】 D

- (5) 设已知函数 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$ 则函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处

- (A) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 连续, $f(x, y)$ 可微. (B) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ 连续, $f(x, y)$ 不可微.

- (C) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 不连续, $f(x,y)$ 可微. (D) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 不连续, $f(x,y)$ 不可微.

【答案】C.

(6) 设 $f(x,y)$ 是连续函数, 则 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 f(x,y) dy = (\quad)$.

- (A) $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x,y) dx$ (B) $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x,y) dx$
 (C) $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x,y) dx$ (D) $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x,y) dx$

【答案】A

(7) 设非负函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续, 给出以下三个命题:

1. 若 $\int_0^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛, 则 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛
 2. 若存在 $p > 1$, 使得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x)$ 存在, 则 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛
 3. 若 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则存在 $p > 1$, 使得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x)$ 存在
- 其中真命题的个数为 ().

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【答案】B

(8) 设 A 为三阶矩阵, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 若 $P^T A P^2 = \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}$, 则 $A = (\quad)$.

- (A) $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$
 (C) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

【答案】C

(9) A 为 4 阶矩阵, 若 $A(A - A^*) = 0$, 且 $A \neq A^*$, 则 $r(A)$ 可能为

- (A) 0 或 1 (B) 1 或 3
 (C) 2 或 3 (D) 1 或 2

【答案】D

(10) 设 A, B 为 2 阶矩阵, 且 $AB = BA$, 则 “ A 有两个不相等的特征值 ” 是 “ B 可对角化 ” 的 ().

(A) 充分必要条件

(B) 充分不必要条件

(C) 必要不充分条件

(D) 既不充分也不必要条件

【答案】B

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

(11) 曲线 $y^2 = x$ 在点 $(0,0)$ 处的曲率圆方程为

【答案】 $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

(12) 设 $f(x, y) = 2x^3 - 9x^2 - 6y^4 + 12x + 24y$ 的极值点是

【答案】 $(1,1)$.

(13) 已知微分方程 $y' = \frac{1}{(x+y)^2}$, 满足 $y(1) = 0$ 的解为

【答案】 $y + \frac{\pi}{4} = \arctan(x + y)$.

(14) 函数 $f(x) = x^2(e^x + 1)$, 求 $f^{(5)}(x) =$

【答案】 $3!e$.

(15) 某物体以速度 $v(t) = t + k \sin \pi t$ 作直线运动, 若它从 $t = 0$ 到 $t = 3$ 的时间段内平均速度为 $\frac{5}{2}$, 则 $k =$

【答案】 $\frac{3}{2}\pi$.

(16) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \\ a \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 且其中任意两个

向量均线性无关, 则 $ab =$

【答案】 -4 .

三、解答题: 17~22 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分) 已知函数设平面有界区域 D 位于第一象限, 由曲线 $xy = \frac{1}{3}$, $xy = 3$ 与

直线 $y = \frac{1}{3}x, y = 3x$ 围成的平面区域, 计算 $\iint_D (1+x-y) dx dy$

【答案】 $\frac{8}{3} \ln 3$.

(18) (本题满分 12 分) 已知 $y(x)$ 满足 $x^2 y'' + xy' - 9y = 0$, 满足 $y(1) = 2, y'(1) = 6$.

(1) 利用变换 $x = e^t$ 将上述方程化为常系数线性方程, 并求 $y(x)$;

(2) 计算 $\int_1^2 y(x) \sqrt{4-x^2} dx$.

【答案】 (1) $y(x) = 2x^3$; (2) $\frac{22}{5} \sqrt{3}$.

(19) (本题满分 12 分) 设 $t > 0$, 平面有界区域 D 由曲线 $y = \sqrt{x}e^{-x}, x = t, x = 2t$ 及 x 轴围成, D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 $V(t)$, 求 $V(t)$ 的最大值.

【答案】 最大值为 $V(\ln 2) = \frac{\pi \ln 2}{16} + \frac{3\pi}{64}$.

(20) (本题满分 12 分) 已知 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $g(x, y) = f(2x+y, 3x-y)$

满足 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1$.

(1) 求 $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$;

(2) 若 $\frac{\partial f(u, 0)}{\partial u} = ue^{-u}, f(0, v) = \frac{1}{50}v^2 - 1$, 求 $f(u, v)$ 的表达式.

【答案】 (1) $\frac{1}{25}$; (2) $f(u, v) = \frac{1}{25}uv - (u+1)e^{-u} + \frac{1}{50}v^2$.

(21) (本题满分 12 分) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, 且 $f'(0) = f'(1), |f''(x)| \leq 1$. 证明:

(1) 当 $x \in (0, 1)$ 时, $|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}$;

(2) $\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \right| \leq \frac{1}{12}$.

【答案】 (1) 泰勒公式在 0 和 1 处展开即可证明; (2) 由 (1) 的不等式两边积分即可证出.

(22) (本题满分 12 分)

已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix}, Ax = 0$ 的解均为 $B^T x = 0$ 的解, 但 $Ax = 0$ 与

$B^T x = 0$ 不同解.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求正交变换 $x = Qy$, 使 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T B A x$ 为标准形.

【答案】 (1) $a=1, b=2$; (2) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, f(x_1, x_2, x_3) = 6y_1^2.$