

# 2024考研数学一

## 试题及答案解析完整版

### 数学(一) 试题

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

(1) 已知函数  $f(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$ ,  $g(x) = \int_0^{\sin x} e^t dt$ , 则

- (A)  $f(x)$  为奇函数,  $g(x)$  为偶函数.      (B)  $f(x)$  为偶函数,  $g(x)$  为奇函数 .  
(C)  $f(x)$  与  $g(x)$  均为奇函数.              (D)  $f(x)$  与  $g(x)$  均为偶函数.

【答案】(C)

(2) 设  $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z)$  均为连续函数,  $\Sigma$  为曲面  $z = \sqrt{1-x^2-y^2} (x \geq 0, y \geq 0)$  的上侧, 则  $\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx =$

- (A)  $\iint_{\Sigma} \left( \frac{x}{z} P + \frac{y}{z} Q \right) dx dy$       (B)  $\iint_{\Sigma} \left( -\frac{x}{z} P + \frac{y}{z} Q \right) dx dy$   
(C)  $\iint_{\Sigma} \left( \frac{x}{z} P - \frac{y}{z} Q \right) dx dy$       (D)  $\iint_{\Sigma} \left( -\frac{x}{z} P - \frac{y}{z} Q \right) dx dy$

【答案】(A)

(3) 已知幂函数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数为  $\ln(2+x)$ , 则  $\sum_{n=0}^{\infty} n a_{2n} =$

- (A)  $-\frac{1}{6}$ .      (B)  $-\frac{1}{3}$ .      (C)  $\frac{1}{6}$ .      (D)  $\frac{1}{3}$ .

【答案】(A)

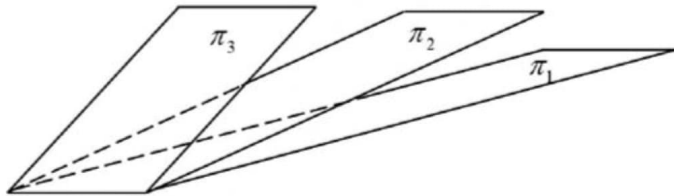
(4) 设函数  $f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  内有定义,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , 则

- (A) 当  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = m$  时,  $f'(0) = m$ .  
(B) 当  $f'(0) = m$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = m$ .  
(C) 当  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = m$  时,  $f'(0) = m$ .  
(D) 当  $f'(0) = m$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = m$ .

【答案】(B)

(5) 在空间直角坐标系  $O-xyz$  中, 三张平面  $\pi_i: a_i x + b_i y + c_i z = d_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 位置关系如图所示, 记  $\alpha_i = (a_i, b_i, c_i)$ ,  $\beta_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$ ,

若  $r \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = m$ ,  $r \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = n$ , 则



- (A)  $m=1, n=2$ . (B)  $m=n=2$ .  
 (C)  $m=2, n=3$ . (D)  $m=n=3$ .

【答案】(B)

(6) 设向量  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \\ a \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 若  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 且其中任意

两个向量均线性无关, 则

- (A)  $a=1, b \neq -1$  (B)  $a=1, b=-1$   
 (C)  $a \neq -2, b=2$  (D)  $a=-2, b=2$

【答案】(D)

(7) 设  $A$  是秩为 2 的 3 阶矩阵,  $\alpha$  是满足  $A\alpha=0$  的非零向量, 若对满足  $\beta^T \alpha = 0$  的任意向量  $\beta$ , 均有  $A\beta = \beta$ , 则

- (A)  $A^3$  的迹为 2. (B)  $A^3$  的迹为 5.  
 (C)  $A^5$  的迹为 7. (D)  $A^5$  的迹为 9.

【答案】(A)

(8) 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X$  是服从  $N(0, 2)$  的正态分布,  $Y$  是服从  $N(-2, 2)$  的正态分布, 若  $P\{2X+Y < a\} = P\{X > Y\}$ , 则  $a =$

- (A)  $-2-\sqrt{10}$  (B)  $-2+\sqrt{10}$  (C)  $-2-\sqrt{6}$  (D)  $-2+\sqrt{6}$

【答案】(B)

(9) 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 在  $X=x$  的条件下,  $Y$  在区间

$(x, 1)$  上服从均匀分布, 则  $\text{cov}(X, Y) =$

- (A)  $-\frac{1}{36}$  (B)  $-\frac{1}{72}$   
 (C)  $\frac{1}{72}$  (D)  $\frac{1}{36}$

【答案】(D)

(10) 设随机变量  $X$  和  $Y$  相互独立, 且都服从参数为  $\lambda$  的指数分布, 令  $Z = |X - Y|$ , 则下列与  $Z$  服从同一分布的是

- (A)  $X + Y$       (B)  $\frac{X + Y}{2}$       (C)  $2X$       (D)  $X$

【答案】(D)

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

(11) 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + ax^2)^{\sin x} - 1}{x^3} = 6$ , 则  $a =$

【答案】6

(12)  $z = f(u, v)$  有二阶连续导数,  $df|_{(1,1)} = 3du + 4dv$ ,  $y = f(\cos x, 1 + x^2)$ , 则  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} =$

【答案】5

(13) 若函数  $f(x) = x + 1$ , 若  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ ,  $x \in [0, \pi]$ , 则极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin a_{2n-1} =$$

【答案】 $-\frac{1}{\pi}$

(14) 微分方程  $y' = \frac{1}{(x + y)^2}$ , 满足条件  $y(1) = 0$  的解为

【答案】 $x = \tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right) - y$ .

(15) 设实矩阵  $A = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a \end{pmatrix}$ , 若对任意实向量  $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ,

$(\alpha^T A \beta)^2 \leq \alpha^T A \alpha \beta^T A \beta$  都成立, 则  $a$  的取值范围

【答案】 $a \geq 0$ .

(16) 随机试验每次成功的概率为  $p$ , 现进行三次独立重复实验, 已知至少成功一次条件下全部成功的概率为  $\frac{4}{13}$ , 则  $p =$

【答案】 $\frac{2}{3}$

三、解答题: 17~22 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分) 已知平面区域  $D = \{(x, y) | \sqrt{1 - y^2} \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ , 计算

$$\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma.$$

【答案】 $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) - 2$

(18) (本题满分 12 分) 设  $f(x, y) = x^3 + y^3 - (x + y)^2 + 3$ , 曲面  $z = f(x, y)$  在  $(1, 1, 1)$  处的切平面为  $T$ ,  $T$  与三个坐标面所围有界区域在  $xOy$  面的投影为  $D$

(1) 求  $T$  的方程

(2) 求  $f(x, y)$  在  $D$  上的最大值和最小值

【答案】切平面  $x + y + z = 3$ ; 最大值 21, 最小值  $\frac{17}{27}$

(19) 设  $f(x)$  二阶可导,  $f'(0) = f'(1), |f''(x)| \leq 1$ , 证:

$$1) |f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}.$$

$$2) \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0) + f(1)}{2} \right| \leq \frac{1}{12}$$

【答案】1) 泰勒公式

2) 把 1) 代入

(20) (本题满分 12 分) 已知有向曲线  $L$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$  与平面  $2x - z - 1 = 0$  的交线从  $z$  轴正向往  $z$  轴负向看去为逆时针方向, 计算曲线积分

$$\int_L (6xyz - yz^2) dx + 2x^2 z dy + xyz dz$$

【答案】  $\frac{4\pi}{5\sqrt{5}}$

(21) (本题满分 12 分) 已知数列  $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$  满足  $x_0 = -1, y_0 = 0, z_0 = 2$ , 且

$$\begin{cases} x_n = -2x_{n-1} + 2z_{n-1} \\ y_n = -2y_{n-1} - 2z_{n-1} \\ z_n = -6x_{n-1} - 3y_{n-1} + 3z_{n-1} \end{cases}, \text{ 记 } \alpha_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \text{ 写出满足 } \alpha_n = A\alpha_{n-1} \text{ 的矩阵 } A, \text{ 并求 } A^n \text{ 及}$$

$x_n, y_n, z_n (n=1, 2, \dots)$ .

$$\text{【答案】 } A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}, A^n = \begin{pmatrix} -4 + (-1)^{n+1} 2^n & -2 + (-1)^{n+1} 2^n & 2 \\ 4 + (-1)^n 2^{n+1} & 2 + (-1)^n 2^{n+1} & -2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$x_n = 8 + (-2)^n, y_n = -8 + (-2)^{n+1}, z_n = 12.$$

(22) (本题满分 12 分) 设总体  $X \sim U(0, \theta)$ ,  $\theta$  未知,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为简单随机样本,

$$X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n), T_c = cX_{(n)}.$$

(1) 求  $c$  时, 使得  $T_c$  为  $\theta$  的无偏估计.

(2) 记  $h(c) = E(T_c - \theta)^2$ , 求  $c$  使得  $h(c)$  取最小值.

【答案】(1)  $c = \frac{n+1}{n}$ ; (2)  $c = \frac{n+2}{n+1}$ .

(2) 求正交变换  $x = Qy$ , 使  $f(x_1, x_2, x_3) = x^T B A x$  为标准形.

**【答案】** (1)  $a=1, b=2$ ; (2)  $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = 6y_1^2$ .